$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{1+t^2} - \frac{2\left(1-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}\right)}{1+t^2}\right]dt = \int_0^1 \frac{2\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}dt$$

b) On a pour tout $t \in [0,1]$: $0 \le 1-t^2 \le 1$ d'où $0 \le (1-t^2)^{n+1} \le 1$

$0 \le t \le 1$ d'où $1 \le 1+t^2 \le 2$ d'où $0 \le \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \le 1$.

c) On a $V_n = 2\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}dt = \frac{1}{2^n}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{(1+t^2)}dt$

On a pour tout $t \in [0,1]$: $0 \le \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \le 1$ d'où $0 \le$

$\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{(1+t^2)}dt \le \int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1$

d'où $0 \le V_n \le \frac{1}{2^n}$, d'autre part $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

3°/On a : $V_n = 2I - U_n$ = et pa suite $U_n = 2I - V_n = \frac{\pi}{2} - V_n$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} (\frac{\pi}{2} - V_n) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ car $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$